Les Fibrations de Grothendieck et L'Algèbre Homotopique

$\wr$

Grothendieck Fibrations and Homotopical Algebra

Eduard Balzin

Laboratoire J. A. Dieudonné, Université Nice Sophia Antipolis

20 juin 2016

Les E_n-algèbres

Les opérades (J. P. May, 1972)

Soit $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbb{1})$ une catégorie monoïdale symétrique.

Une *opérade* $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{M}$ est une séquence symétrique $\{\mathcal{O}(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ d'objets de $\mathcal{M}$ munie de compositions

$$\mathcal{O}(m_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{O}(m_l) \longrightarrow \mathcal{O}(m_1 + \ldots + m_l)$$

associatives, compatibles avec l'action des groupes symétriques et unitaires.

Une $\mathcal{O}$-*algèbre* est un objet $X \in \mathcal{M}$ muni de morphismes d'action

$$\mathcal{O}(n) \otimes X^{\otimes m} \longrightarrow X$$

compatibles avec la structure de $\mathcal{O}$.

Les opérades E_n

Notons **Top** la catégorie des espaces topologiques avec $\otimes = \times$, et par $D^n(r) \in$ **Top** le n-disque de rayon r. L'on définit

$$\mathrm{E}_n(m) = \{D^n(r_1) \hookrightarrow D^n, \ldots, D^n(r_m) \hookrightarrow D^n\}$$

l'espace des immersions $D^n(r_i) \hookrightarrow D^n := D^n(1)$ pour $0 < r_i \leq 1$. La collection $\{\mathrm{E}_n(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ est naturellement une opérade.

Soit $X = \Omega^n Y$ un espace de lacets n-itéré. Il existe une structure naturelle d'E_n-algèbre sur X. Il existe également un résultat inverse ("la machine de delacement de May"), *à homotopie près.*

Les opérades $\mathbb{E}_n$

Notons $\mathbf{DVect}_k$ la categorie des complexes de chaines des espaces vectoriels sur un corps k, $\otimes = \otimes_k$. L'on prend $\mathbb{E}_n(m) := C_\bullet(\mathrm{E}_n(m))$, et cela donne une opérade dans $\mathbf{DVect}_k$.

Conjecture de Deligne. Pour une *dg*-algèbre A, il existe une structure de $\mathbb{E}_2$-algèbre sur $CH^\bullet(A, A)$ (réalisant les opérations connues sur $HH^\bullet(A, A)$), *à quasi-isomorphisme près.*

Preuve: compliquée. Il faut trouver $\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \xleftarrow{qis} \dots \xrightarrow{qis} \mathbb{E}_2$, et l'action de $\mathcal{O}$ sur $CH^\bullet(A, A)$.

Est-ce qu'il y a une autre approche sans cette ambiguïté?

Les algèbres de factorisation (Beilinson, Drinfeld)

L'on note $Cf(m, D^n) \cong (D^n)^m$ l'espace de configurations de m points dans D^n (qui peuvent coïncider).

Une *algèbre de factorisation* $\mathcal{A}$ sur D^n est une collection de faisceaux $\mathcal{A}_m \in \mathsf{Shv}(Cf(m, D^n), \mathbf{DVect}_k)$ munie des morphismes

$$\delta_m^* \mathcal{A}_m \longrightarrow \mathcal{A}_1$$

où $\delta_m : Cf(1, D^n) \longrightarrow Cf(m, D^n)$ est la diagonale, et des *quasi-isomorphismes*

$$i_m^* \mathcal{A}_m \xrightarrow{qis} \mathcal{A}_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \mathcal{A}_1 =: \mathcal{A}_1^{\boxtimes m}$$

où $i_m : \{(x_1, \ldots, x_m) \in Cf(m, D^n) | x_i \neq x_j\} \hookrightarrow Cf(m, D^n)$ et

$$(\mathcal{A}_1^{\boxtimes m})_{(x_1, \ldots, x_m)} = (\mathcal{A}_1)_{x_1} \otimes_k \ldots \otimes_k (\mathcal{A}_1)_{x_m}.$$

Les algèbres de factorisation constructibles

L'espace $Cf(m, D^n)$ possède une stratification naturelle (coïncidence des points), et on peut considérer les faisceaux constructibles par rapport à cette stratification.

Théorème. Au quasi-isomorphisme près, les $\mathbb{E}_n$-algèbres sont la même chose que les algèbres de factorisation constructibles sur D^n.

$n = 2$, $D \equiv D^2$: l'on peut considérer $\Pi_1^{EP}(Cf(m, D))$, le groupoïde fondamental stratifié (les chemins peuvent "coller" les points), et

$$\mathsf{Shv}_{constr}(Cf(m, D, \mathbf{DVect}_k) \cong \mathsf{Fun}(\Pi_1^{EP}(Cf(m, D)), \mathbf{DVect})$$

et la description devient beaucoup plus rigide.

L'algèbre homotopique sans les opérades?

Contrairement aux opérades dans **Top** ou $\mathbf{DVect}_k$, le groupoïde stratifié $\Pi_1^{EP}(Cf(m,D))$ est une petite catégorie. Il y a donc moins d'ambiguïté, comme le choix d'une opérade-modèle pour $\mathbb{E}_2$.

Comment reproduire le formalisme d'algèbres de factorisation dans les autres contextes algébro-homotopiques?

Les objets de Segal

Les Γ-espaces (Segal, 1974)

Notons Γ la catégorie d'ensembles finis et Γ_+ la catégorie dont les objets sont ceux de Γ et les morphismes sont les applications partiellement définies, $S \supset U \to T$.

Pour chaque ensemble fini S, ses elements $\{s\} \subset S$ induisent les morphismes $\rho_s : S \to 1$ de Γ_+. Un Γ-espace de Segal Γ est alors un foncteur

$$\Gamma_+ \xrightarrow{A} \mathbf{Top},$$

tel que le morphisme induit (appelé *le morphisme de Segal*)

$$A(S) \overset{\prod A(\rho_S)}{\longrightarrow} A(1)^S$$

est une équivalence homotopique pour chaque $S \in \Gamma_+$.

La multiplication cohérente homotopique

Pour $S \in \Gamma_+$, l'on a le morphisme $\pi_S : S \to 1$ défini sur chaque élément de S. Considérons le diagramme span

$$\begin{tikzcd} & A(S) \arrow[dl, "\prod A(\rho_S)"', "\sim"] \arrow[dr, "A(\pi_S)"] & \\ A(1)^S & & A(1). \end{tikzcd}$$

dont la flèche gauche est une equivalence d'homotopie. En l'inversant, on obtient $m_S : A(1)^S \to A(1)$.

Dans $\mathrm{Ho}\,\mathbf{Top}$, le type de $A(1)$ est un monoïde commutatif. Mais un Γ-espace contient plus d'information qu'un H-espace ("la machine de delacement de Segal").

(Merci à P. Taylor pour le package Diagrams.)

Categories d'operateurs — l'algèbre sans les opérades?

L'on peut remplacer Γ par O, la catégorie des ensembles finis ordonnés. Cela fournit une description des monoïdes associatifs.

Selon Barwick (et plus généralement par les travaux Batanin-Markl, Berger), il y a aussi des catégories finies C_n qui fournissent des moyens pour décrire les E_n-algèbres comme certains foncteurs $(C_n)_+ \to \mathbf{Top}$, sans l'utilisation des opérades topologiques.

Cependant, si l'on remplace $(\mathbf{Top}, \times)$ par une catégorie monoïdale symétrique arbitraire $(\mathcal{M}, \otimes)$, le formalisme de Segal ne fonctionne plus.

Un contournement (Segal, Lurie): $\mathcal{M}$ est un monoïde commutatif dans **Cat**, donc une Γ-catégorie.

Les fibrations de Grothendieck

Les (op)fibrations de Grothendieck

Les flèches opcartésiennes (à l'ancienne)

Soit $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ un foncteur. Un morphisme $\alpha : x \to y$ of $\mathcal{E}$ est *p-opcartésien* si pour chaque $\beta : x \to z$ tel que $p\beta = p\alpha$ il existe une factorisation unique $\beta = \gamma\alpha$, où $p(\gamma) = id_{p(y)}$:

$$\begin{tikzcd}
 & z \\
x \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, mapsto] & y \arrow[u, dashed, "\exists!\gamma"'] \arrow[d, mapsto] \\
px \arrow[r, "p\alpha"] & py
\end{tikzcd}$$

Notre définition est celui de SGA1; dans les références modernes, la même notion est appelée localement opcartésien.

Les opfibrations

Un foncteur $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ est une opfibration de Grothendieck si:

1. Pour chaque $f : c \to c'$ de $\mathcal{C}$ et $x \in \mathcal{E}$ tel que $px = c$ il existe un relèvement opcartésien $\alpha : x \to f_! x$, $p\alpha = f$:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dashed, "\exists\alpha"] \arrow[d, mapsto] & f_! x \arrow[d, mapsto] \\ c \arrow[r, "f"] & c'. \end{tikzcd}$$

2. La composition de morphismes opcartésiens est opcartésienne.

Pour $c \in \mathcal{C}$, notons $\mathcal{E}(c) = p^{-1}c$ la fibre de p sur c. Alors par un choix des relèvements opcartésiens vers $f : c \to c'$, l'on définit un foncteur $f_! : \mathcal{E}(c) \to \mathcal{E}(c')$.

Les notions duales: morphismes cartésiens, fibrations de Grothendieck.

Exemple: catégories monoïdales symétriques

Etant donné une catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{M}$ avec $\otimes$, l'on construit une opfibration $\mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_{+}$.

1. Un objet de $\mathcal{M}^{\otimes}$ est une paire de $S \in \Gamma_{+}$ et d'une famille S-indexée $\{X_s\}_{s \in S}$ des objets de $\mathcal{M}$.
2. Un morphisme dans $\mathcal{M}^{\otimes}$, $(S, \{X_s\}_{s \in S}) \to (T, \{Y_t\}_{t \in T})$, consiste en une flèche $f : S \to T$ de Γ_{+} et des morphismes $\otimes_{s \in f^{-1}(t)} X_s \to Y_t$ pour chaque $t \in T$.
3. La projection $(S, \{X_s\}_{s \in S}) \to S$ fournit un foncteur $\mathcal{M}^{\otimes} \to \Gamma_{+}$.

L'on observe que $\mathcal{M}^{\otimes}(S) \cong \mathcal{M}^{S}$. L'application $S \mapsto \mathcal{M}^{\otimes}(S)$ peut être complétée en un pseudo-foncteur qui satisfait les conditions de Segal dans **Cat**. Il y a une considération similaire pour d'autres catégories d'opérateurs.

Les algèbres comme les sections

Soit $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ une opfibration. Une *section* de p est un foncteur $A : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ tel que $pA = id$. Les sections de p forment une catégorie $\mathsf{Sect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ munie des transformations naturelles fibre par fibre.

Dans l'exemple $\mathcal{M}^{\otimes} \to \mathbf{Fin}_+$, considérons une section $A : \Gamma_+ \to \mathcal{M}^{\otimes}$ telle que pour chaque morphisme $j : S \to T$ de la forme

$$S \hookleftarrow T \xrightarrow{id} T,$$

le morphisme $A(j)$ est opcartésien. Alors l'on a $A(S) \cong (A(1), \ldots, A(1))$ et l'on obtient les morphismes $A(1)^{\otimes S} \to A(1)$ dans $\mathcal{M}^{\otimes}(1) = \mathcal{M}$. De cette façon, l'objet $A(1)$ devient un monoïde commutatif dans $\mathcal{M}$.

Les conditions de Segal?

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie monoïdale symétrique et $\mathcal{W}$ une sous-catégorie d'équivalences faibles (préservées par $\otimes$). Dans ce cas, les algèbres commutatives ne forment pas une bonne catégorie homotopique.

En plus, l'on n'a toujours pas une description de Segal pour les monoïdes dans $\mathcal{M}$. En général, une section ordinaire A d'opfibration $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ envoie $f : c \to c'$ à, en effet, $f_! A(c) \to A(c')$. Est-ce qu'on peut avoir une "section faible" X, qui produirait de $f : c \to c'$ un diagramme

$$\begin{tikzcd} & X(f) \arrow[dl, "\sim"] \arrow[dr] & \\ f_! X(c) & & X(c') \end{tikzcd}$$

dont la flèche gauche est dans $\mathcal{W}$?

Les sections derivées

Les remplacements simpliciaux (Bousfield, Kan, 1972)

Etant donné une catégorie $\mathcal{C}$, son *remplacement simplicial* est la catégorie $\mathbb{C}$ telle que

1. Un objet $\mathbf{c}_{[n]} \in \mathbb{C}$ est donné par une séquence de flèches composables de $\mathcal{C}$:
$$\mathbf{c}_{[n]} = c_0 \to c_1 \to \ldots \to c_n.$$
2. Un morphisme $\alpha : \mathbf{c}_{[n]} \to \mathbf{c}'_{[m]}$ consiste en un morphisme $a : [m] \to [n]$ de Δ tel que $c_{a(i)} = c'_i$ pour chaque $i \in [m]$.

Définie ainsi, $\mathbb{C} = (\int N\mathcal{C})^{\mathsf{op}}$. Les applications $\mathbf{c}_{[n]} \mapsto c_0$, $\mathbf{c}_{[n]} \mapsto c_n$ définissent des foncteurs $\mathbb{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}$ et $\mathbb{C} \xrightarrow{t} \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Les foncteurs d'un remplacement simplicial

Un morphisme $f : c \to c'$ de $\mathcal{C}$ peut être considéré comme un objet de $\mathbb{C}$. Il y a un span dans $\mathbb{C}$, de la forme $c \leftarrow (c \xrightarrow{f} c') \to c'$. Pour $F : \mathbb{C} \to \mathcal{N}$ l'on obtient des diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd} & F(c \to c') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ F(c) & & F(c'). \end{tikzcd}$$

Si l'on demande que la flèche gauche soit un isomorphisme (et de même pour toutes les inclusions d'intervalle à gauche), nous obtiendrons un foncteur $\bar{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$.

Dans le cas où $\mathcal{N}$ a des équivalences faibles $\mathcal{W}$, l'on peut aussi demander à la flèche gauche d'être dans $\mathcal{W}$.

L'extension de $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ vers $\mathbb{C}$

Rappellons l'application de l'objet final $t : \mathbb{C} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, $\mathbf{c}_{[n]} \mapsto c_n$. On veut l'utiliser pour relever une opfibration (une famille covariante) $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ à $\mathbb{C}$. Cependant, pour cela l'on a besoin de remplacer $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ par une *fibration transposée* (une famille contravariante) $\mathcal{E}^{\top} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Cette famille est caractérisée par le fait que $\mathcal{E}^{\top}(c) \cong \mathcal{E}(c)$ et que pour chaque morphisme $f : c' \leftarrow c$ de $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, le foncteur de transition $\mathcal{E}^{\top}(c) \to \mathcal{E}^{\top}(c')$ est isomorphe à $f_! : \mathcal{E}(c) \to \mathcal{E}(c')$. C'est cependant une fibration donc une section de $(\mathcal{M}^{\otimes})^{\top} \to \mathbf{Fin}_{+}^{\mathsf{op}}$ est une *co-algebre* dans $\mathcal{M}$.

Ensuite, l'on définit *l'extension simpliciale* $\mathbf{E} \to \mathbb{C}$ comme l'image inverse de $\mathcal{E}^{\top} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ vers $t : \mathbb{C} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Les sections dérivées

Etant donnée une opfibration $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, sa *présection* est une section $X : \mathbb{C} \to \mathbf{E}$ de la fibration construite précédemment. Pour $f : c \to c'$ (le foncteur associé $f_! : \mathcal{E}(c) \to \mathcal{E}(c')$), l'on obtient un span dans $\mathcal{E}(c')$ de la forme désirée:

$$\begin{tikzcd} & X(c \to c') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ f_! X(c) & & X(c'). \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ possède une structure homotopique (des équivalences faibles dans chaque $\mathcal{E}(c)$ préservées par $f_!$), l'on peut demander que la flèche gauche soit une équivalence faible.

Les présections X munies de telles "conditions de Segal" sont appelées les *sections dérivées*. Elles forment une catégorie homotopique $\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

La structure de modèles

La catégorie de modèles PSect

Soit $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ une *opfibration de modèles*, c'est-a-dire, chaque $\mathcal{E}(x)$ est une catégorie de modèles, et les foncteurs de transition $\mathcal{E}(x) \to \mathcal{E}(y)$ preservent les equivalences faibles et les fibrations.

Théorème. *Dans ce cas, la catégorie de présections* $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) = \mathsf{Sect}(\mathbb{C}, \mathbf{E})$ *possède une structure de modèles dont les équivalences faibles sont fibre par fibre.*

L'on a donc réalisé $\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ comme une sous-catégorie pleine homotopique de $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. Notons $\operatorname{Ho}\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ et $\operatorname{Ho}\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ les catégories correspondantes après la localisation.

Ce résultat est une conséquence d'un théorème valide dans un contexte beaucoup plus général.

Les semifibrations

Une *semifibration* sur une catégorie de factorisation $(\mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$ est un foncteur $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ tel que

1. pour chaque morphisme $l : x \to y$ de $\mathcal{L}$ et $Y \in \mathcal{E}(y)$ il existe un relèvement cartésien $l^* Y \to Y$ de l,
2. pour chaque morphisme $r : x \to y$ de $\mathcal{R}$ et $X \in \mathcal{E}(x)$ il existe un relèvement opcartésien $X \to r_! X$ de r,
3. étant donné un morphisme $\alpha : X \to Y$ de $\mathcal{E}$ et une factorisation de $p(\alpha)$ comme $x \xrightarrow{r} z \xrightarrow{l} y$ (l'ordre des flèches est renversé), il existe une décomposition de α comme

$$X \xrightarrow{\rho} Z \xrightarrow{\omega} Z' \xrightarrow{\lambda} Y,$$

telle que $p(\rho) = r$, $p(\lambda) = l$ et $p(\omega) = id_z$.

Le Théorème MS

Soit $\mathcal{R}$ une catégorie de Reedy. Une *semifibration de modèles* sur $\mathcal{R}$ est

1. une semifibration $\mathcal{E} \to \mathcal{R}$ pour le système de factorisation Reedy $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_-, \mathcal{R}_+)$ telle que
2. chaque fibre $\mathcal{E}(x)$ est une catégorie de modèles,
3. pour chaque $l : x \to y$ de $\mathcal{R}_-$, le foncteur de transition $l^* : \mathcal{E}(y) \to \mathcal{E}(x)$ préserve les fibrations et les fibrations triviales, et
4. pour chaque $r : x \to y$ de $\mathcal{R}_+$, le foncteur de transition $r_! : \mathcal{E}(x) \to \mathcal{E}(y)$ préserve les cofibrations et les cofibrations triviales.

Théorème MS. *La catégorie* $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ *de sections d'une semifibration de modèles* $\mathcal{E} \to \mathcal{R}$ *possède une structure de modèles dans laquelle les équivalences faibles sont définies objet par objet, et les fibrations et cofibrations sont de Reedy.*

Preuve: doucement, par induction.

Le Théorème MS: quelques détails, “à droite”

Soit $y \in \mathcal{R}$, alors $Mat(y) := (y\backslash\mathcal{R}_-) \setminus \{y \xrightarrow{id} y\}$. L’on a un foncteur $Res_y : \mathcal{E}|_{Mat(y)} \to \mathcal{E}(y)$ induit par les morphismes cartésiens.

Soit $X \in \mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ et $y \in \mathcal{R}$, alors $M_yX := \varprojlim_{Mat(y)} Res_yX|_{Mat(y)}$.

Définition-proposition. Un morphisme de sections $X \to Y$ est une fibration (triviale) de Reedy si et seulement si pour chaque $y \in \mathcal{R}$, le morphisme $X(y) \to M_yX \times_{M_yY} Y(y)$ est une fibration (triviale).

Proposition. La catégorie $\mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ est complète et pour chaque diagramme $X_\bullet : I \to \mathsf{Sect}(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ et $y \in \mathcal{R}$, l’on a

$$\begin{tikzcd}
(\varprojlim_I X_\bullet)(y) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \varprojlim_I (X_\bullet(y)) \arrow[d] \\
M_n(\varprojlim_I X_\bullet)(y) \arrow[r] & \varprojlim_I (M_n X_\bullet)(y).
\end{tikzcd}$$

Le Théorème MS: discussion

Notre resultat s'applique dans le cadre des prefaisceaux de Quillen considérés par Hirschowitz-Simpson, c'est-à-dire quand $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ est une bifibration. Dans ce cas, les deux structure de modèles coïncident.

Lemme. Soit $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ une opfibration de modèles (exemple: $\mathbf{DVect}_k^{\otimes} \to \Gamma_+$), alors la fibration $\mathbf{E} \to \mathbb{C}$ est une semifibration de modèles.

Contrairement à Hirschowitz-Simpson, nos foncteurs de transition ne possèdent pas forcément d'adjoints, ni ne préservent les (co)limites. Cela nous permet de considérer les produits n-aires tensoriels.

Les résolutions

Les résolutions: définition

Situation actuelle: $\mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \subset \mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, la catégorie $\mathsf{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ est une catégorie de modèles. L'on voudrait savoir produire des sections dérivées.

Définition. Un foncteur $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est une *résolution* si pour chaque $\mathbf{c}_{[n]} = c_0 \to \ldots \to c_n$ de $\mathbb{C}$, la catégorie $\mathcal{D}(\mathbf{c}_{[n]})$ des objets $d_0 \to \ldots \to d_n$ de $\mathsf{Fun}([n], \mathcal{D})$ munis d'un isomorphisme $(Fd_0 \to \ldots \to Fd_n) \cong \mathbf{c}_{[n]}$, est contractile, dans le sens où son nerf est tel.

Exemples formels: $t_{\mathcal{C}} : \mathbb{C} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, $h_{\mathcal{C}} : \mathbb{C} \to \mathcal{C}$, équivalences de catégories, les (op)fibrations dont les fibres sont contractiles.

Les résolutions dans la topologie

Soit G un groupe tel que son espace classifiant BG est un CW-complexe fini. Soit I une décomposition cellulaire régulière de BG, regardée comme un poset. Il y a un foncteur naturel

$$F : I \longrightarrow \Pi_1(BG) \cong G$$

donné par un choix de point dans chaque cellule. Le foncteur F est une résolution.

En notant $\mathcal{D}(\mathcal{C}, k)$ la catégorie dérivée des foncteurs $\mathcal{C} \to \mathbf{DVect}_k$, l'on a

$$F^* : \mathsf{DRep}(G, k) \cong \mathcal{D}(\Pi_1(BG), k) \to \mathcal{D}(I, k) \cong \mathcal{D}(A(I)\text{-}\mathbf{Mod}).$$

L'on peut prouver que F^* est pleinement fidèle, et son image consiste en les $X : I \to \mathbf{DVect}_k$ *localement constantes*: pour chaque $f : i \to i'$ de I, $X(f)$ est un quasi-isomorphisme.

Les sections dérivées localement constantes

Soient $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ une opfibration de modèles et $\mathit{Iso}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ une sous-catégorie.

Définition. Une section dérivée $X \in \mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ est $\mathcal{S}$-*localement constante*, ou *localement constante vers* $\mathcal{S}$, si X envoie vers les équivalences faibles tels les morphismes $\mathbf{c}_{[n]} \to \mathbf{c}'_{[m]}$ qui vérifient les propriétés suivantes:

1. le morphisme induit $[m] \to [n]$ de Δ est une inclusion d'intervalle de $[m]$ comme derniers $m+1$ éléments de $[n]$,
2. les morphismes $c_{i-1} \to c_i$, $1 \leq i \leq n-1$, appartiennent à $\mathcal{S}$.

Exemple. Chaque algèbre $A : \Gamma_+ \to \mathcal{M}^{\otimes}$ est une section dérivée localement constante vers la sous-catégorie des morphismes inertes de Γ_+, c'est-à-dire de la forme $S \hookleftarrow T \xrightarrow{=} T$.

Notons $\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \subset \mathsf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ la sous-catégorie des sections dérivées $\mathcal{S}$-localement constantes.

Le Théorème RES

Soient $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ une opfibration de modèles, $\mathit{Iso}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ une sous-catégorie et $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur. Alors le foncteur F induit

$$F^* : \mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E}),$$

où $F^*\mathcal{E} \to \mathcal{D}$ est l'image inverse de $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, et $\mathit{Iso}(\mathcal{D}) \subset F^*\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ est la sous-catégorie donnée par les f de $\mathcal{D}$ tels que $F(f) \in \mathcal{S}$.

Théorème RES. *Si en plus $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est une résolution, alors*

$$\mathsf{h}F^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ho}\,\mathsf{DSect}_{F^*\mathcal{S}}(\mathcal{D}, F^*\mathcal{E})$$

est une équivalence de catégories.

Si $\mathcal{S} = \mathit{Iso}(\mathcal{C})$, alors $F^*\mathit{Iso}(\mathcal{C})$ est la sous-catégorie de morphismes de $\mathcal{D}$ qui tombent dans les isomorphismes de $\mathcal{C}$.

Commentaires sur la preuve

Pour prouver le Théorème RES, l'on construit un foncteur $\mathsf{h}F_!$ inverse à $\mathsf{h}F^*$, comme

$$\mathsf{h}F_! \ := \ \mathbb{L}p_{F,!} \circ \mathsf{h}\mu_F^* \circ \mathbb{R}\delta_{\mathcal{D},*},$$

où:

1. Le foncteur $\delta_{\mathcal{D},*} : \mathsf{PSect}(\mathcal{D},\mathcal{E}) = \mathsf{Sect}(\mathbb{D},\mathbf{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathbb{D}_\Pi,\mathbf{E}_\Pi)$ est l'extension de Kan à droite vers le foncteur $\delta_{\mathcal{D}} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}_\Pi$. La catégorie $\mathbb{D}_\Pi$ est le Π-*remplacement* de $\mathcal{D}$, ses objets sont $\mathbf{c}_P : P \to \mathcal{D}$, avec $P \in \Pi$ un ensemble fini partiellement ordonné muni des objets initial et final.

2. Le foncteur $\mu_F^* : \mathsf{Sect}(\mathbb{D}_\Pi,\mathbf{E}_\Pi) \to \mathsf{Sect}(\mathbb{T}(F),\mathbf{E})$ est l'image inverse vers le foncteur $\mu : \mathbb{T}(F) \to \mathbb{D}_\Pi$. Ici, l'on note $p_F : \mathbb{T}(F) \to \mathbb{C}$ *la tour de F*, une opfibration dont les fibres sont les remplacements simpliciaux des $\mathcal{D}(\mathbf{c}_{[n]})$.

3. Le foncteur $p_{F,!} : \mathsf{Sect}(\mathbb{T}(F),\mathbf{E}) \to \mathsf{Sect}(\mathbb{C},\mathbf{E}) = \mathsf{PSect}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ est l'extension de Kan à gauche vers l'opfibration $p_F : \mathbb{T}(F) \to \mathbb{C}$.

Les algèbres dérivées

Les catégories d'opérateurs (Barwick, 2013)

Définition. Une *catégorie d'opérateurs* C est une petite catégorie munie d'un objet terminal 1, telle que les ensembles de morphismes $C(1, x)$ sont finis pour chaque $x \in C$ et que les images inverses existent vers chaque morphisme $1 \to x$ de C.

Exemples. La catégorie Γ. La catégorie O des ensembles finis ordonnés. Pour un exemple élaboré, considérons la catégorie B telle que:

1. Ses objets sont les injections $f : S \hookrightarrow D$ dont le domaine est $S \in \Gamma$, vers le 2-disque D, la même chose qu'une configuration de $|S|$ points dans le disque.
2. Un morphisme de $f : S \hookrightarrow D$ à $f' : S' \hookrightarrow D$ est donné par une application d'ensembles $\alpha : S \to S'$ et par un chemin de f à $f' \circ \alpha$ dans le groupoïde stratifié $\Pi_1^{EP}(Cf(|S|, D))$ de l'espace de configurations $Cf(|S|, D)$.

Intuition: B est obtenue en remplaçant les groupes d'automorphismes d'ensembles finis par les groupes de tresses.

Les classificateurs d'algèbres

Définition. Soit C une catégorie d'opérateurs. Son *classificateur d'algèbres* est la catégorie $\mathrm{A_C}$ telle que

1. $\mathrm{Ob}\,\mathrm{A_C} = \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}$,
2. dont les hom-ensembles $\mathrm{A_C}(x, y)$ sont donnés par les classes d'équivalence des spans $x \hookleftarrow z \to y$, où $z \to y$ est dans C et $z \hookrightarrow x$ est un *monomorphisme admissible*: c'est une composition d'images inverses des monomorphismes (admissibles) élémentaires $1 \to t$.

Par exemple, $\Gamma_+ = \mathbb{A}_\Gamma$. Dans O, les monos admissibles sont les inclusions d'intervalle.

Un morphisme de $\mathrm{A_C}$ est appelé *inerte* si l'on peut le présenter comme $z \hookleftarrow x \overset{=}{\to} x$, et *actif* si l'on peut le présenter comme $y \overset{=}{\hookleftarrow} y \to t$. Les morphismes inertes et actifs forment un système de factorisation $(In_\mathrm{C}, Act_\mathrm{C})$ sur $\mathrm{A_C}$.

Les algèbres dérivées

Définition. Soit C une catégorie d'opérateurs. Une *catégorie* C-*monoïdale* est une opfibration de Grothendieck $\mathcal{M}^{\otimes} \to \mathrm{A}_{\mathrm{C}}$ telle que pour chaque $x \in \mathrm{A}_{\mathrm{C}}$, le foncteur induit

$$\mathcal{M}^{\otimes}(x) \longrightarrow \prod_{(x \to 1) \in In_{\mathrm{C}}} \mathcal{M}^{\otimes}(1)$$

est une équivalence de catégories.

Une *catégorie de modèles* C-*monoïdale* est une catégorie C-monoïdale $\mathcal{M}^{\otimes} \to \mathrm{A}_{\mathrm{C}}$ qui est aussi une opfibration de modèles.

Définition. Étant donnée une catégorie de modèles C-monoïdale, sa *catégorie des algèbres dérivées* est $\mathsf{DAlg}(\mathrm{C}, \mathcal{M}) := \mathsf{DSect}_{In_{\mathrm{C}}}(\mathrm{A}_{\mathrm{C}}, \mathcal{M}^{\otimes})$, la catégorie de sections dérivées de $\mathcal{M}^{\otimes} \to \mathrm{A}_{\mathrm{C}}$ qui sont In_{C}-localement constantes.

Le Théorème RES-ALG

Définition. Un foncteur $F : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ entre des catégories d'opérateurs est une résolution si:

1. Le foncteur F préserve les limites et $\mathrm{D}(1, x) \cong \mathrm{C}(1, F(x))$,
2. Le foncteur F est une résolution.

NB: L'on ne demande pas que $\mathrm{A}_{\mathrm{D}} \to \mathrm{A}_{\mathrm{C}}$ soit une résolution!

Théorème RES-ALG. *Étant donnée une catégorie de modèles* C*-monoïdale* $\mathcal{M}^{\otimes} \to \mathrm{A}_{\mathrm{C}}$ *et une résolution* $F : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ *de catégories d'opérateurs, le foncteur induit*

$$\mathsf{h}F^* : \operatorname{Ho}\mathsf{DAlg}(\mathrm{C}, \mathcal{M}) \longrightarrow \operatorname{Ho}\mathsf{DAlg}_{F^* \mathit{Iso}(\mathrm{C})}(\mathrm{D}, F^*\mathcal{M})$$

est une équivalence de catégories, où $\mathsf{DAlg}_{F^* \mathit{Iso}(\mathrm{C})}(\mathrm{D}, F^*\mathcal{M})$ *est la catégorie des algèbres dérivées localement constantes vers* $F^* \mathit{Iso}(\mathrm{C}) \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{A}_{\mathrm{D}}$.

Preuve. Une application répétée du Théorème RES.

Les arbres planaires

Un *arbre planaire* T est

1. un graphe connexe non-orienté sans cycles possédant un sommet distingué de valence 1 qui s'appelle la racine,
2. les ensembles $V(T)$ de tous les sommets et $E(T)$ de toutes les branches sont finis,
3. pour chaque sommet $v \in V(T)$ il y a une donnée d'ordre cyclique sur l'ensemble de branches attachés à v. Cela fournit à T une structure de graphe orienté.

Un morphisme $f : T \to T'$ consiste en une application orientée cellulaire $|f| : |T| \to |T'|$ entre les résolutions géométriques, telle que

1. $|f|$ préserve les racines et,
2. pour chaque $a, b \in V(T)$, l'image par $|f|$ d'une géodésique entre a et b in $|T|$, est une géodésique entre $|f|(a)$ et $|f|(b)$.

Les arbres planaires stables

Un arbre planaire *marqué* est une paire (T, S), où $T \in \mathrm{T}_0$ et $S \subset V(T)$ est un sous-ensemble qui ne contient pas la racine. Un arbre planaire marqué est *stable* si chaque sommet non-marqué (sauf la racine) est de valence au moins 3.

Définition. Un objet de la catégorie T est un arbre planaire marqué stable (T, S). Un morphisme $(T, S) \to (T', S')$ consiste en un morphisme $f : T \to T'$ de T_0 tel que f envoie S vers S'.

La catégorie T est une catégorie d'opérateurs.

Il y a encore une autre catégorie $\tilde{\mathrm{T}}$ dont les objets sont ceux de T munis d'une immersion dans le 2-disque qui envoie la racine vers le point fixe sur le bord. Le foncteur oubli $\tilde{\mathrm{T}} \to \mathrm{T}$ est une équivalence de catégories.

La procédure d'oublier tout sauf les sommets marqués induit un foncteur $\tilde{\mathrm{T}} \to \mathrm{B}$. En renversant l'équivalence $\tilde{\mathrm{T}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}$, l'on obtient $Cm : \mathrm{T} \to \mathrm{B}$.

La résolution de B par les arbres planaires stables

Théorème PT. *(déjà esquissé par Kontsevich-Soibelman, Kaledin) Le foncteur* $Cm : \mathrm{T} \to \mathrm{B}$ *est une résolution.*

Les Théorèmes PT et RES-ALG impliquent que le foncteur d'image inverse

$$\mathsf{h}\,Cm^* : \mathrm{Ho}\,\mathsf{DAlg}(\mathrm{B}, \mathcal{M}) \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{DAlg}_{Cm^*\,Iso(\mathrm{B})}(\mathrm{T}, \mathcal{M})$$

est une équivalence de catégories.

L'on peut prouver la conjecture de Deligne en dehors du formalisme des opérades. Pour $\mathbf{DVect}_k^{\otimes} \to \Gamma_+$ et une *dg*-algèbre A sur k, il existe un moyen combinatoire de construire une algèbre dérivée $CH^\bullet_T(A) \in \mathsf{DAlg}_{Cm^*\,Iso(\mathrm{B})}(\mathrm{T}, \mathbf{DVect}_k)$ dont la valeur sur $1 \in \mathrm{T}$ est $CH^\bullet(A, A)$.

Cela nous fournit alors une algèbre dérivée $CH^\bullet_B(A) \in \mathsf{DAlg}(\mathrm{B}, \mathbf{DVect}_k)$ et une présentation de $CH^\bullet(A, A)$ comme d'une $\mathbb{E}_2$-algèbre.

Merci de votre attention